

Partie A : dénombrement

On considère l'ensemble des nombres entiers relatifs **non nuls** compris entre -30 et 30 ; cet ensemble peut s'écrire ainsi : $\{-30; -29; -28; \dots -1; 1; \dots; 28; 29; 30\}$. Il comporte 60 éléments.

On choisit dans cet ensemble successivement et sans remise un entier relatif a puis un entier relatif c .

1. On peut choisir comme premier terme du couple entre 60 entiers; comme il n'y a pas de remise (???) et que $(a; b) \neq (b; a)$, le deuxième terme peut être choisi entre 59 entiers.

On peut donc obtenir $60 \times 59 = 3540$ couples différents.

2. L'équation a deux racines si le déterminant est supérieur à zéro, donc si :

$$\Delta = 4 - 4ac > \iff (4(1 - ac)) > \iff 1 - ac > 0 \iff ac < 1.$$

3. Il faut donc trouver le nombre de couples vérifiant $ac \geq 1$, mais en fait $ac > 1$ puisque l'on ne peut avoir $(-1; -1)$ ni $(1; 1)$.

Si l'on choisit en premier un entier négatif (30 choix) le second terme sera choisi dans les 29 entiers négatifs restant, soit $30 \times 29 = 870$ couples;

Même chose si les deux termes choisis sont positifs, soit 870 couples.

L'évènement \overline{M} sera réalisé pour $870 + 870 = 1740$ couples.

4. D'après le résultat précédent l'évènement M sera réalisé pour $3540 - 1740 = 1800$ couples.

$$\text{Donc } p(M) = \frac{1800}{3540} = \frac{30}{59} \approx 0,5084 \text{ soit } 0,508 \text{ au millième près.}$$

Partie B : équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E): \quad y' + 10y = (30x^2 + 22x - 8)e^{-5x+1} \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}$$

où y est une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} .

1. L'équation différentielle est équivalente à l'équation $y' = -10y$.

On sait que les solutions de cette équation sont les fonctions définies par

$$x \longmapsto f(x) = Ce^{-10x}, \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

- 2.

$$f(x) = (6x^2 + 2x - 2)e^{-5x+1}.$$

Étant admis que f est dérivable sur \mathbb{R} , on calcule :

$$f'(x) = (12x+2)e^{-5x+1} + (-5)(6x^2 + 2x - 2)e^{-5x+1} = e^{-5x+1} [12x + 2 - 30x^2 - 10x + 10] = e^{-5x+1} (-30x^2 + 2x + 12).$$

$$\text{Alors } f'(x) + f(x) = e^{-5x+1} (-30x^2 + 2x + 12) + 10(6x^2 + 2x - 2)e^{-5x+1} = e^{-5x+1} (-30x^2 + 2x + 12 + 60x^2 + 20x - 20) = e^{-5x+1} (30x^2 + 22x - 8).$$

On a donc bien démontré que f est une solution de l'équation différentielle (E).

3. Les résultats précédents permettent d'énoncer que toutes les solutions de (E) sont la somme de f et des solutions de l'équation $y' + 10y = 0$, soit

Toutes les solutions de (E) sont de la forme $(6x^2 + 2x - 2)e^{-5x+1} + Ce^{-10x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Partie C : étude de fonction

On rappelle que, pour tout réel x , $f(x) = (6x^2 + 2x - 2)e^{-5x+1}$.

1. On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

$$\text{On a } 6x^2 + 2x - 2 = x^2 \left(6 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} \right).$$

$$\text{Comme } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2} = 0, \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 6 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} = 6.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty,$$

Enfin on sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-5x+1} = +\infty$ on a finalement :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

2. On sait que quel que soit le réel $-5x + 1$, $e^{-5x+1} > 0$: le signe de $f(x)$ est donc celui du trinôme $6x^2 + 2x - 2$.

Le trinôme vérifie l'évènement M puisque avec $a = 6$ et $c = -2$, $ac = -12 < 1$. Le trinôme s'annule donc pour deux réels distincts : géométriquement \mathcal{C}_f coupe l'axe des abscisses en deux points.

$$\text{Non demandé : } \Delta = 4 + 48 = 52 = 4 \times 13.$$

$$\text{Les racines sont donc } x_1 = \frac{2 + \sqrt{52}}{12} = \frac{1 + \sqrt{13}}{6} \approx 0,77 \text{ et } x_2 = \frac{2 - \sqrt{52}}{12} = \frac{1 - \sqrt{13}}{6} \approx -0,43$$

3. On a vu en A. 2. que $f'(x) = e^{-5x+1} (-30x^2 + 2x + 12)$; comme on sait que quel que soit le réel $-5x + 1$, $e^{-5x+1} \neq 0$, donc $f'(x) = 0 \iff -30x^2 + 2x + 12 = 0 \iff$

$$-15x^2 + x + 6 = 0. \text{ Comme } \Delta = (-1)^2 - 4 \times (-15) \times 6 = 361 = 19^2 > 0, \text{ ce trinôme s'annule pour } x_1 = \frac{-1 + 19}{-30} = -\frac{18}{30} = -\frac{3}{5} \text{ et } x_2 = \frac{-1 - 19}{-30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}.$$

Aux points d'abscisse $-\frac{3}{5}$ et $\frac{2}{3}$, le nombre dérivé est nul ce qui signifie que la tangente en ces deux points est horizontale.

4. Avec $f\left(-\frac{3}{5}\right) \approx -56,8$ et $f\left(\frac{2}{3}\right) \approx 0,19$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$		
signe de $f'(x)$		-	0	+	0	-
variations de f	$+\infty$		$\approx -56,8$		$\approx 0,19$	0

5. Sur l'intervalle $]-\infty ; -\frac{3}{5}[$, la fonction f décroît de plus l'infini à environ $-56,8$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un réel α de cet intervalle tel que $f(\alpha) = 1$.

Sur l'intervalle $]-\frac{3}{5} ; +\infty[$, $f(x) \leq 0,19 < 1$: il n'existe pas de solution de l'équation $f(x) = 1$ sur cet intervalle.

Conclusion : sur \mathbb{R} , l'équation $f(x) = 1$ a une solution.

6. Pour tout réel m strictement supérieur à $0,2$, on définit I_m par $I_m = \int_{0,2}^m f(x) dx$.

a. F est un produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R} : sur cet intervalle :

$$F'(x) = \left(-\frac{12}{5}x - \frac{22}{25}\right) e^{-5x+1} - 5 \left(-\frac{6}{5}x^2 - \frac{22}{25}x + \frac{28}{125}\right) e^{-5x+1} =$$

$$e^{-5x+1} \left(-\frac{12}{5}x - \frac{22}{25} + 6x^2 + \frac{22}{5}x - \frac{28}{25}\right) = \left(6x^2 - \frac{10}{5}x - \frac{50}{25}\right) e^{-5x+1} =$$

$$(6x^2 - 2x + 2) e^{-5x+1} = f(x).$$

Sur \mathbb{R} , $F'(x) = f(x)$ montre que F est une primitive de la fonction f .

b. On a donc $I_m = \int_{0,2}^m f(x) dx = [F(x)]_{0,2}^m = F(m) - F(0,2)$.

$$\text{Or } F(0,2) = F\left(\frac{1}{5}\right) = \left(-\frac{6}{5} \times \frac{1}{25} - \frac{22}{25} \times \frac{1}{5} + \frac{28}{125}\right) e^{-5 \times \frac{1}{5} + 1} = \left(-\frac{28}{125} + \frac{28}{125}\right) e^0 =$$

$$0 \times 1 = 0.$$

Il faut donc résoudre l'équation $F(m) = 0$ soit $\left(-\frac{6}{5}m^2 - \frac{22}{25}m + \frac{28}{125}\right) e^{-5m+1} = 0 \iff$
 $-\frac{6}{5}m^2 - \frac{22}{25}m + \frac{28}{125} = 0$, car quel que soit $m \in \mathbb{R}$, $e^{-5m+1} > 0$.

On étudie donc le trinôme $-\frac{6}{5}m^2 - \frac{22}{25}m + \frac{28}{125}$ ou encore $-150m^2 - 110m + 28$ en multipliant par 125, et en simplifiant par 2 le trinôme : $-75m^2 - 55m + 14$.

Pour ce trinôme $\Delta = (-55)^2 - 4 \times (-75) \times 14 = 7225 = 85^2 > 0$.

Ce trinôme a deux racines $m_1 = \frac{55+85}{-150} = -\frac{140}{150} = -\frac{14}{15}$ et $m_2 = \frac{55-85}{-150} = \frac{-30}{-150} = \frac{1}{5} = 0,2$.

La deuxième solution a déjà été trouvée ci-dessus ($F(0,2) = 0$).

Il existe donc une autre valeur $-\frac{14}{15}$ telle que $F\left(-\frac{14}{15}\right) = 0$ mais cette solution est négative alors que l'on demande une solution supérieure à $0,2$ donc positive.

Interprétation graphique

On a tracé les représentations graphiques des fonctions f et F .

La surface limitée par la représentation graphique de f , \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = 0,2$ et $x = m$ est égale à l'intégrale I_m .

Cette surface se compose de deux parties :

- une première partie correspondant à l'intégrale de 0,2 à environ 0,43 (valeur qui annule f); la courbe étant sous l'axe des abscisses l'aire est l'opposée de l'intégrale;
- une deuxième partie correspondant à l'intégrale de 0,43 à m ; la courbe étant au dessus de l'axe des abscisses l'aire est égale à l'intégrale.

On a trouvé qu'il n'existe pas de valeur de m telle que I_m s'annule signifie géométriquement que quel que soit $m > 0,2$, l'aire de la surface située au dessus de l'axe des abscisses n'est pas égale à l'aire de la surface située sous l'axe des abscisses.

On voit aussi que pour $m > 0,2$ aucun point de la représentation de F (en rouge) n'a une ordonnée nulle.

